ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ	(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ)
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΧΡΗΣΤΟΣ Κ. ΤΑΤΑΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	ΠΕΜΠΤΗ 02 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ 1.

Α) Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας:

(1) Ένα επίπεδο προσδιορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε δύο σημεία του και ένα διάνυσμα παράλληλο προς το επίπεδο αυτό.

(2) Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της παράλληλης μεταφοράς του επιπέδου κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ είναι ισομετρία.

(3) Η επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0$ παριστάνει υπερβολή.

(4) Η επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$: $x^2 + y^2 = 1$ παριστάνει κύκλο.

(5) Η επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$: $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z - 16 = 0$ παριστάνει μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Oz.

(1 μονάδα)

Β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία της απολύτου τιμής της 3×3 ορίζουσας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$. Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 2.

Α) Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα.

Στη συνέχεια θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{\delta} \in \mathbb{R}^3$ το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο των $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \times (\overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\delta}) = \overrightarrow{0}.$$

(1 μονάδα)

Β) Να αποδειχθεί **διανυσματικά** ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3.

Α) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ να δώσετε ένα παράδειγμα δύο ασύμβατων ευθειών.

(0.4 μονάδες)

Β) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ να δώσετε ένα παράδειγμα δύο ευθειών οι οποίες να είναι παράλληλες μεταξύ τους. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε ένα κάθετο διάνυσμα για κάθε μία από τις ευθείες αυτές.

(0.5 μονάδες)

Γ) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ να δώσετε ένα παράδειγμα δύο σφαιρών οι οποίες εφάπτονται.

(0.6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4.

Α) Θεωρούμε το επίπεδο (π_1) για το οποίο γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $P_1(1, -1, 1)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο: $2x - 3y + z + 1 = 0$. Επιπλέον, θεωρούμε το επίπεδο (π_2) για το οποίο γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $P_2(1, 0, 0)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα: $3x + 2y + 1 = 0$ και $-\dfrac{1}{2}x + z + 1 = 0$.

Να προσδιόρισετε τη σχετική θέση των επιπέδων (π_1) και (π_2) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση αυτών.

(0.8 μονάδες)

Β) Δίνονται τα συνεπίπεδα σημεία $A(1,-1,2), B(0,\lambda,2), \Gamma(-1,1,0), \Delta(1,-3,1) \in \mathbb{R}^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω Π το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\varphi(\Pi)$ το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ όπου A', B', Γ', Δ', οι εικόνες των A, B, Γ, Δ, μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού φ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παριστάνει στροφή περί τον άξονα Oz κατά γωνία $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου $\varphi(\Pi)$.

(1.2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 5.

Να δοθεί ο ορισμός της ισομετρίας στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια να εξετάσετε **με χρήση ισομετριών** αν τα τετράπλευρα $\delta_1 = \{(5,2),(7,2),(5,5),(7,5)\}$ και $\delta_2 = \{(0,-1),(0,-3),(-3,-3),(-3,-1)\}$ του επιπέδου είναι ίσα.

(1.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 6.

Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x,y,z) = 14x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz - 14yz, \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.

Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$14x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz - 14yz - 24\sqrt{2}y - 24\sqrt{2}z = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.

(2 μονάδες)

Καλή επιτυχία!!!
